Diviser pour régner

Plan de cours

Pierre Senellart

5 octobre 2017

Prendre les présences sur Moodle. Questions préliminaires ?

1 Force brute

— Exploration exhaustive
— Exemples : recherche linéaire, tri
— Souvent possible, toujours considérer avant d'abandonner
— Parfois seule solution
— Parfois constante très faible, ok pour petites tailles

2 Diviser pour régner (4.1, 4.2)

— Origine historique (*Divide et impera*, attribué à Philippe II de Macédoine, utilisée en politique, en stratégie militaire)
— Principe informatique : diviser, traitement récursif, combinaison
— Permet souvent (mais pas toujours) de gagner en temps

2.1 Exemple : recherche dichotomique

2.2 Exemple : multiplication de matrice

— Algorithme standard
— Diviser pour régner naïf, analyse superficielle, formule de récurrence
— Évocation de l'algorithme de Strassen et de sa formule de récurrence

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n = 1; \\ 7T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

3 Analyse d'algorithmes récursifs (4.4)

— Hypothèse simplificatrice des puissances de 2 (ou autre), pas critique
— Arbres de récurrence pour recherche dichotomique, multiplication de matrice naïve, Strassen ($\log_2 7 \approx 2.807$)
— Intérêt pratique de Strassen
— Mention des algorithmes de multiplication de matrice moderne (Coppersmith–Winograd et améliorations, 2.375477 (1990), 2.374 (2010), 2.3728642 (2011), 2.3728639 (2014))

4 Théorème maître (4.5 et 4.6)

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$. On pose $c = \log_b a$.

1. Si $f(n) = O(n^{c'})$ avec $c' < c$: $T(n) = \Theta(n^c)$.
2. Si $f(n) = \Theta(n^c \log^k(n))$: $T(n) = \Theta(n^c \log^{k+1}(n))$;
3. Si $f(n) = \Omega(n^{c'})$ avec $c' > c$ et si $af(\frac{n}{b}) \leq \alpha f(n)$ pour $\alpha < 1$ et n suffisamment grand : $T(n) = \Theta(f(n))$.

— Pas une trichotomie
— Exemples d'application
— On fait toujours l'hypothèse des puissances de b
— Généralisé par Akra–Bazzi
— Preuve ! Essentiellement, Lemme 4.3 du Cormen

5 Multiplication rapide de polynômes, transformée de Fourier discrète (30)

— Problème
— Méthode naïve, $O(n^2)$
— Représentation sous forme d'ensemble de points, schémas de preuves
— Racines n-ième de l'unité
— Transformée de Fourier discrète (DFT) – connection avec la théorie du signal
— Transformée de Fourier rapide : décomposition en composants pairs, composants impairs, obtention de la DFT à partir des deux décompositions, schéma général de l'algorithme
— Analyse de la complexité par le théorème maître
— Transformée de Fourier discrète inverse, inversion de la matrice de Vandermonde, réutilisation de la transformée de Fourier rapide